수능 정답 및 해설

2015학년도 수학 A형

정 답										
	01 ①	02 ⑤	03 ④	04 ③	05 ④	06 ③	07 ②	08 ④	09 ②	10 ③
	11 ①	12 ②	13 ③	14 ①	15 ⑤	16 ⑤	17 ④	18 ②	19 ⑤	20 ①
	21 ⑤	22 7	23 11	24 54	25 20	26 12	27 5	28 33	29 16	30 120

해 설

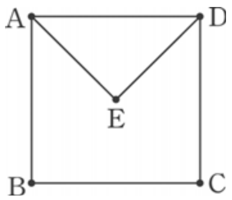
01 $5\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=5\times2=10$ 답 ①

02 $A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 $2+2+3+2=9$ 답 ⑤

03 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+6}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{6}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}=4$ 답 ④

04



이 그래프의 연결관계를 나타내는 행렬은

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix}A&B&C&D&E\end{matrix}\\
\begin{matrix}A\\B\\C\\D\\E\end{matrix} & \begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}
\end{array}$$

이므로 0의 개수는 13개이다. 답 ③

05 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $(r>0)$

$a_5=a_1r^4$에서

$48 = 3r^4$

$\therefore\ r^4 = 16,\ r = 2$

$\therefore\ a_3 = a_1 \cdot r^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$ 답 ④

06 $\int_0^1 (2x+a)dx = \left[x^2 + ax\right]_0^1 = 1 + a = 4$

$\therefore\ a = 3$ 답 ③

07 $(x+a)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_4 \cdot a^2$이다.

$\therefore\ {}_6\mathrm{C}_4 \cdot a^2 = 60,\ a^2 = 4$

$a > 0$이므로 $a = 2$ 답 ②

08 $\lim_{x \to -0} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$이므로

$\lim_{x \to -0} f(x) + \lim_{x \to 1+0} f(x) = 4$ 답 ④

09 $a_4 = S_4 - S_3 = \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

$= \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$ 답 ②

10 $P_A = 20\log 255 - 10\log E_A$,

$P_B = 20\log 255 - 10\log E_B$

이므로

$P_A - P_B = -10\log E_A + 10\log E_B$

$= 10\log \frac{E_B}{E_A}$

$= 10\log 100$

$= 20$

답 ③

11 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3,\ a_2 = 1$이므로

첫째항은 3, 공비는 $\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{81}{8}$ 답 ①

12 토마토 줄기의 길이를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따른다.

토마토 줄기의 길이가 27 cm 이상이고 32 cm 이하일 확률은

$\mathrm{P}(27 \le X \le 32)$이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(27 \le X \le 32) &= \mathrm{P}\left(\frac{27-30}{2} \le Z \le \frac{32-30}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 1) \\ &= 0.4332 + 0.3413 \\ &= 0.7745\end{aligned}$$

답 ②

13 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ 3f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로 $f(a)=0$, $a(a+1)(a-4)=0$에서

$a=0$ 또는 -1 또는 4이므로 모든 a값의 합은 3 답 ③

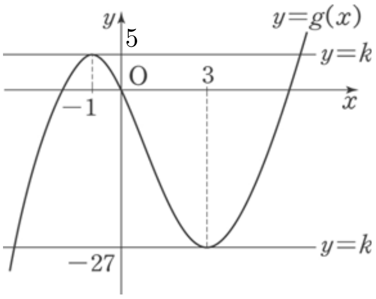
14 $x(x+1)(x-4) = 5x + k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x^3 - 3x^2 - 9x = k$에서

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$라 하면

$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

$g(3) = -27$, $g(-1) = 5$



위의 그림에서 $k=5(\because\ k>0)$일 때 $g(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 가진다. 답 ①

15 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \le 5^{x+4}$

$5^{-1+2x} \le 5^{x+4}$

$-1+2x \le x+4$

$\therefore\ x \le 5$

따라서, 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은 $1+2+3+4+5=15$ 답 ⑤

16 $\mathrm{P}(B^C|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{8}$ 답 ⑤

17 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=3n^2+n$이므로

$$\begin{aligned}a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}&=(3n^2+n)-(3(n-1)^2+(n-1))\\&=(3n^2+n)-(3n^2-6n+3+n-1)\\&=6n-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{2n-1}=6n-2\ \ (n\geq 2)$

이때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_{2k-1}=4$이므로 위의 식은 $n=1$일 때부터 성립한다.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $a_n=pn+q$라고 하면 $a_{2n-1}=p(2n-1)+q$이므로

$2pn-p+q=6n-2$

$\therefore\ p=3,\ q=1$

$\therefore\ a_n=3n+1$

$\therefore\ a_8=25$ 답 ④

18 $x+y+z+3w=14\ \cdots$ ㉠

$x+y+z+w=10\ \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $2w=4\quad\therefore\ w=2$

즉, $x+y+z=8$을 만족하는 음이 아닌 정수 $(x,\ y,\ z,\ 2)$의 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$이다. 답 ②

19 $A^2-AB=3E,\ A^2B-B^2A=A+B$에서

ㄱ. $A(A-B)=3E$

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-B)\quad\therefore$ 참

ㄴ. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A$에서 $A\cdot\dfrac{1}{3}(A-B)=\dfrac{1}{3}(A-B)\cdot A$

$A^2-AB=A^2-BA$

$\therefore\ AB=BA\quad\therefore$ 참

ㄷ. $$\begin{aligned}A^2B-B^2A&=AB(A-B)\\&=A(A-B)B\\&=3B\ (\because AB=BA)\end{aligned}$$

$\therefore\ 3B=A+B,\ A=2B$

$A^2-AB=3E$에서 $2B^2=3E$

$\therefore\ (A+2B)^2=(4B)^2=16B^2=24E\quad\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

20 함수 $f(x)$는 주기가 3인 함수이고, 우함수이다.

$f(x) \geq 0$이므로 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx = 13$의 해는 유일하게 존재한다.

$\int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_{0}^{3} f(x)dx = 2$이므로

$\int_{0}^{9} f(x)dx = 6$, $\int_{9}^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}$이다.

$\therefore \int_{-10}^{10} f(x)dx = 2\int_{0}^{10} f(x)dx = 2\left(6 + \frac{1}{2}\right) = 13$

이므로, $a = 10$ 답 ①

21 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ⋯ ㉠이라 하자.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$이므로

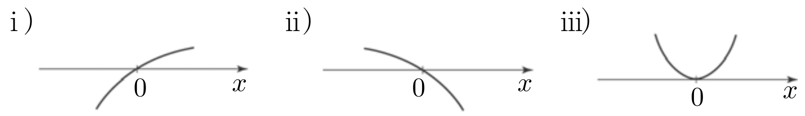
$f(x) - f'(x) = x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x + (c-b)$

조건 (나)에 의하여 $f(0) - f'(0) = c - b = 0$이므로 $b = c$ ⋯ ㉡

$g(x) = f(x) - f'(x)$라 하면

$g(x) = x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x$ ⋯ ㉢

이때 $y = g(x)$는 원점을 지나므로 $x = 0$ 근처에서 생각해 보면 다음과 같은 세 가지의 경우를 생각해 볼 수 있다.



그런데 $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$이므로 세 번째 경우만이 가능하고 $g(x)$는 $x = 0$에서 x축에 접하므로 $g(x)$는 x^2을 인수로 가진다.

$\therefore$ ㉢에서 $b = 2a$ ⋯ ㉣이고 $g(x) = x^3 + (a-3)x^2$

이때 $x \geq -1$에서 $g(x) \geq 0$이므로 $g(-1) = -1 + a - 3 \geq 0$

$\therefore a \geq 4$

㉠, ㉡, ㉣로부터 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 2a$이고

$f(2) = 8 + 4a + 4a + 2a = 10a + 8$이므로 $a = 4$일 때 최솟값 48을 가진다. 답 ⑤

22 $\lim_{x \to 0} \frac{x(x+7)}{x} = \lim_{x \to 0}(x+7) = 7$ 답 7

23 $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & (x < 1) \\ x + a & (x \geq 1) \end{cases}$

에서 $x < 1$일 때와 $x \geq 1$일 때는 각각 다항함수이므로 연속이다.

따라서, $f(x)$가 실수 전체에서 연속이려면 $x=1$일 때 연속이면 된다.

$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0}(x+a) = 1+a$

$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0}(2x+10) = 12$

$f(1) = a+1$

$\therefore\ 1+a=12$이면 되므로 $a=11$ 　답 11

24 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{x=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5\sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 4+50 \\ &= 54\end{aligned}$$

답 54

25 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$에서 $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{3}n,\ \mathrm{V}(X)=\frac{2n}{9}$이므로

$\mathrm{V}(3X)=9\mathrm{V}(X)=9\cdot\frac{2n}{9}=2n=40$

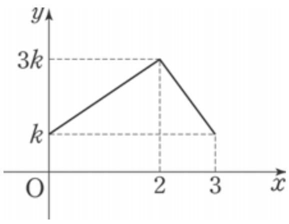
$\therefore\ n=20$ 　답 20

26 $f'(x)=6x^2+4$를 부정적분하면 $f(x)=2x^3+4x+C$

이때 $f(0)=6$이므로 $C=6$

$\therefore\ f(1)=2\cdot1^3+4\cdot1+6=12$ 　답 12

27



$[0,\ 3]$까지 넓이가 1이므로 사각형과 삼각형의 넓이를 더한 값이 1이다.

$3k+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2k=1$

$\therefore\ 6k=1,\ k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(0\le X\le2)$은 $0\le x\le2$ 범위의 사다리꼴의 넓이이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)\cdot2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ p+q=5$ 　답 5

28 등비수열 $\left(\frac{6}{k}\right)^n$의 극한에 관한 문제이므로

i) $k=6$일 때 $a_k=\frac{1}{2}$

ii) $k>6$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=0$이므로 $a_k=0$

iii) $0<k<6$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=\infty$ 이므로 $\left(\frac{6}{k}\right)^n$으로 분자, 분모를 나누면

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)}{1+\frac{1}{\left(\frac{6}{k}\right)^n}}=\frac{6}{k}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_k&=\sum_{k=1}^{5}ka_k+6\cdot a_6+\sum_{k=7}^{10}ka_k\\&=\sum_{k=1}^{5}6+6\times\frac{1}{2}+\sum_{k=7}^{10}0\\&=30+3=33\end{aligned}$$

답 33

29 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로 $g(1)=24,\ g'(1)=0$이다.

$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서 $g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g(1)=3f(1)=24$

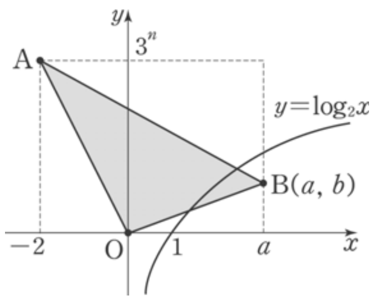
$\therefore f(1)=8$

$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$

$\therefore f'(1)=-f(1)=-8$

$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$ 답 16

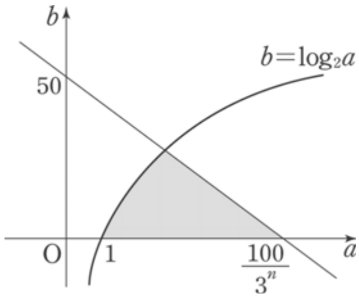
30



$A(-2,\ 3^n)$, $B(a,\ b)$이므로

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}|3^n\cdot a-(-2)\cdot b|=\frac{1}{2}(3^na+2b)$ ($\because$ a, b는 자연수)

따라서, 두 식 $b\le\log_2 a$, $3^na+2b\le 100$을 만족하는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하면 된다.



ⅰ) $n=1$일 때

$3a+2b \le 100$, $b \le \log_2 a$

① $b=1$일 때 $2 \le a \le 32$이므로 31개

② $b=2$일 때 $4 \le a \le 32$이므로 29개

③ $b=3$일 때 $8 \le a \le 31$이므로 24개

④ $b=4$일 때 $16 \le a \le 30$이므로 15개

$\therefore f(1)=99$

ⅱ) $n=2$일 때

$9a+2b \le 100$, $b \le \log_2 a$

① $b=1$일 때 $2 \le a \le 10$이므로 9개

② $b=2$일 때 $4 \le a \le 10$이므로 7개

③ $b=3$일 때 $8 \le a \le 10$이므로 3개

$\therefore f(2)=19$

ⅲ) $n=3$일 때

$27a+2b \le 100$, $b \le \log_2 a$

① $b=1$일 때 $2 \le a \le 3$이므로 2개

② $b \ge 2$일 때 주어진 조건을 만족하는 a가 없다.

$\therefore f(3)=2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $f(1)+f(2)+f(3)=120$ 답 120