2013학년도 수리 영역(가형)

정 답									
01 ④	02 ②	03 ③	04 ②	05 ②	06 ①	07 ①	08 ⑤	09 ⑤	10 ③
11 ①	12 ④	13 ④	14 ③	15 ⑤	16 ③	17 ④	18 ①	19 ⑤	20 ②
21 ⑤	22 14	23 28	24 36	25 51	26 7	27 23	28 40	29 16	30 573

해 설

01 $2A+B=2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 $1+0+3+3=7$이다.

02 $\sin\theta=\frac{1}{3}$이면 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \sin2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

03 $\mathrm{A}(a,1,3)$, $\mathrm{B}(a+6,4,12)$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점은

$\left(\frac{a+6+2a}{3},\ \frac{4+2\times1}{3},\ \frac{12+2\times3}{3}\right)=(5,\ 2,\ 6)$

$a+2=5$, $6=b$이므로

$\therefore\ a=3,\ b=6 \qquad \therefore\ a+b=9$

04 $x^2-2x+2\sqrt{x^2-2x}=8$에서

$\sqrt{x^2-2x}=X$라 두면

$X^2+2X-8=0$

$(X+4)(X-2)=0$

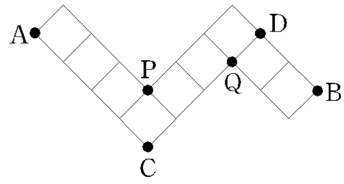
$X=2\ (\because\ X>0)$

$\sqrt{x^2-2x}=2$이므로

$x^2-2x-4=0 \quad \cdots(*)$

(*)은 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에서 두 실근의 곱은 -4이다.

05 C지점을 지나지 않고 D지점도 지나지 않으려면



A $\rightarrow$ P $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ B 를 통과하는 최단경로에서

A $\rightarrow$ P $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ D $\rightarrow$ B를 통과하는 최단경로를 빼면 된다.

$\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}-\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}\times1\times1$

$=4\times3\times3-4\times3=36-12=24$

06 $x^2-4y^2=a$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{1}{2}x$ 이고

$(b,\ 1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$b^2-4=a$

$(b,\ 1)$에서 접선의 방정식은

$bx-4y=a$

$\therefore$ 접선의 기울기는 $\frac{b}{4}$

접선이 점근선과 수직이고 $b>0$이므로

$\frac{b}{4}=2 \quad \therefore\ b=8$

$\therefore\ a=64-4=60$

$\therefore\ a+b=68$

07 $T_0=20$℃, $t=\frac{9}{8}$일 때, $T=365$℃ 이므로

$$365=20+k\log\left(8\cdot\frac{9}{8}+1\right)$$
$$=20+k$$

$\therefore\ k=345$

$710=20+345\log(8a+1)$에서

$\therefore\ \log(8a+1)=2,\ 8a+1=100$

$\therefore\ a=\frac{99}{8}$

08 버스로 등교하는 사건을 A, 지각하는 사건을 B라 하면 구하는 확률 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{1}{20}}{\frac{6}{10}\times\frac{1}{20}+\frac{4}{10}\times\frac{1}{15}}=\frac{6\times3}{6\times3+4\times4}$$

$$=\frac{9}{17}$$

09 회전변환 f의 행렬을 A, 대칭변환 g의 행렬을 B라 하면

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이고

합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$의 행렬은 $B^{-1}\cdot A\cdot B$이다.

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$에서

$x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{y},\ y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$

$x+2y+5=0$이 $ax'+by'+5=0$으로 옮겨지므로

$a\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+5=0$

$\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)y+5=0$

$\therefore\ \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=2$

연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\therefore\ a+2b=\frac{5}{2}$

10 처음 걷는 속력을 $v\,(v>0)$라 하면

$\frac{1}{v}+\frac{5}{2v}+\frac{6}{v+2}\le\frac{5}{2}$

$2(v+2)+5(v+2)+6\times 2v\le 5v(v+2)$

$5v^2-9v-14\ge 0$

$(v+1)(5v-14)\ge 0$

$v\le -1,\ v\ge\frac{14}{5}$

$\therefore$ 구하는 최솟값은 $\frac{14}{5}$

11 i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} = \frac{4}{7}$$

1개의 동전을 3번 던져 앞면이 2개 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$\therefore$ 이 때의 확률은 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}$

ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은

$1-$(꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률)

$$= 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

1개의 공을 2번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ 이 때의 확률은 $\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}$

위 i), ii)로부터, 구하는 확률은

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4} = \frac{9}{28}$$

12 $\int_0^1 tf(t)\,dt = A$라 하면

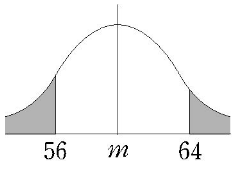
$f(x) = e^{x^2} + A$ 이므로

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 t \cdot f(t)dt \\ &= \int_0^1 t \cdot (e^{t^2} + A)dt \\ &= \int_0^1 t \cdot e^{t^2} + At\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}At^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}$$

$\therefore\ A = e - 1$

13 ㈎ 조건에서



그래프의 대칭의 중심은 60이므로

$m=60$

㈏ 조건에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=6^2+60^2=3616$$

$\therefore\ \sigma^2=16,\quad \sigma=4$

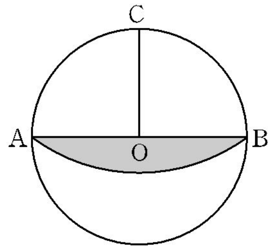
$$\mathrm{P}(X\le 68)=\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)=0.5+\mathrm{P}(0\le X\le m+2\sigma)$$
$$=0.9772$$

14 R_n에서 새로 생긴 작은 원의 반지름을 r_n이라 하고

새로 생긴 작은 원의 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

a_1은 반원에서 [그림 1]의 색칠된 부분의 넓이를 빼면 되므로

$$a_1=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2-\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)$$
$$=1$$

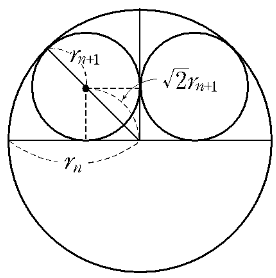


[그림 1]

[그림 2]에서 $\sqrt{2}\,r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$,

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

$$\therefore\ \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2$$



[그림 2]

새로 생기는 작은 원들은 직전 원의 개수의 2배씩 생기므로

$$(\text{공비})=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-2(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$$

15 함수 $f(x)$는 $x\ne 0,\ x\ne 2$인 모든 실수 x에서 연속이고,

함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

$\therefore\ y=(g\circ f)(x)$는 $x\ne 0,\ x\ne 2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서, $y=(g\circ f)(x)$가 $x\ne 0,\ x\ne 2$에서 연속일 조건을 구하면 된다.

$g(x)$가 다항함수이므로

$\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to 1}g(t)=g(1),\ g(f(0))=g(0)=3$에서

$\therefore\ g(1)=3\ \cdots\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to 2-0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to +0}g(t)=g(0)=3,$

$\lim\limits_{x\to 2+0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to -1+0}g(t)=g(-1),$

$g(f(2))=g(0)=3$

$\therefore\ g(-1)=g(0)=3\ \cdots\cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서, $g(0)=g(1)=g(-1)=3$이고,

이것은 $g(x)=3$이 서로 다른 세 실근 $x=0,\ 1,\ -1$을 가진다는 것을 뜻한다.

$\therefore\ g(x)=x(x+1)(x-1)+3$

$\therefore\ g(3)=3\times4\times2+3=27$

16 ㄱ. $2A^2+AB=E,\ A(2A+B)=E$

$\therefore\ A^{-1}=2A+B \quad \therefore$ 참

ㄴ. $AB+BA=2A+E \ \cdots$ ㉠

$2A^2+AB=E \quad \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $BA-2A^2=2A,\ (B-2A-2E)A=O$

A^{-1}이 존재하므로, $B-2A-2E=O$

$\therefore\ B=2A+2E \quad \therefore$ 참

ㄷ. ㄴ에서 $B=2A+2E$이므로

$2A^2+AB=E$에서

$2A^2+A(2A+2E)=E$이므로

$4A^2+2A-E=O$이다.

또한, $(B-E)^2=(2A+E)^2=4A^2+4A+E=2A+2E=B$이다.

그런데, $(B-E)^2=O$이면 $B=O$이고, $B=O$이면 $(B-E)^2=E\neq O$가 되어 모순이다. $\quad\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 $a_{n+1}-a_n=\left(n\cdot 2^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)-\left((n-1)\cdot 2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}\right)$

$=\boxed{\{2n-(n-1)\}2^{n-1}}+\frac{a_n}{n}$

$a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{n}+\boxed{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$

$b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\frac{\boxed{(n+1)2^{n-1}}}{n+1}$

$b_2=3$이므로

$b_n=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}2^{k-1}$

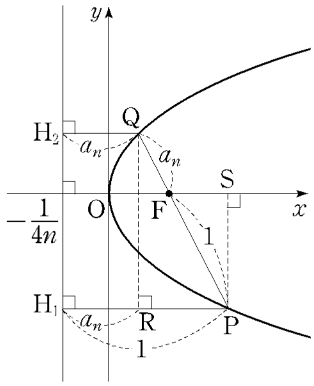
$=3+\frac{2(2^{n-2}-1)}{2-1}$

$=\boxed{2^{n-1}+1}$

$\therefore\ f(n)=(n+1)\cdot 2^{n-1},\ g(n)=2^{n-1}+1$

$\therefore\ f(4)+g(7)=40+65=105$

18



P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1,

Q 에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2,

Q 에서 PH_1에 내린 수선의 발을 R,

P 에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=1=\overline{\mathrm{PH}_1}$ $\quad\overline{\mathrm{FS}}=1-\dfrac{1}{2n}$

$\overline{\mathrm{QF}}=a_n=\overline{\mathrm{QH}_2}$

$\triangle\mathrm{PQR}\backsim\triangle\mathrm{FPS}$

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{FS}}$이고

$1+a_n : 1-a_n=1:1-\dfrac{1}{2n}$

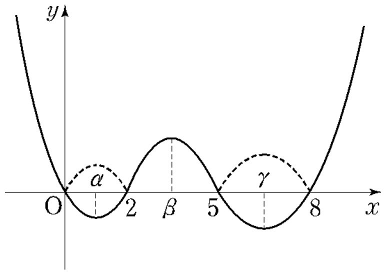
$$1-a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+a_n)$$
$$=1-\frac{1}{2n}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)a_n$$

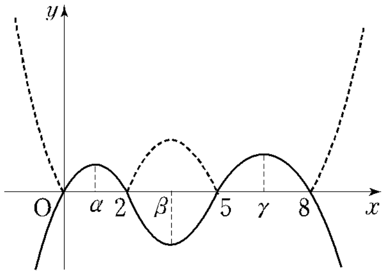
$$\frac{1}{2n}=\left(2-\frac{1}{2n}\right)a_n$$

$$a_n=\frac{1}{4n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10$$
$$=220-10=210$$

19



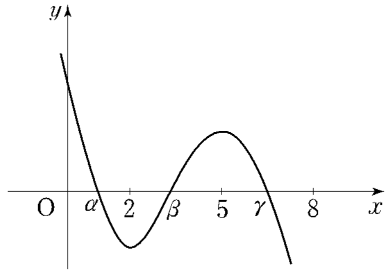


$h(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$라 하면

$h(x)$는 사차함수이므로 위 두 그림 중 하나이다.

$f(x)=h'(x)$이므로, 두 그림 중 $f(0)=h'(0)>0$을 만족하는 경우는 위의 오른쪽 그림이다.

$\therefore\ y=f(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다.



ㄱ. $y=h(x)$는 3개의 극점을 가지는 사차함수이므로, $f(x)=h'(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다. $\therefore$ 참

ㄴ. $f'(0)<0$ $\therefore$ 참

ㄷ. $\displaystyle\int_m^{m+2} f(x)=h(m+2)-h(m)$이다.

$h(2)=0=h(0)\quad \therefore\ h(2)-h(0)=0$

$h(3)<0<h(1)\quad \therefore\ h(3)-h(1)<0$

$h(4)<0=h(2)\quad \therefore\ h(4)-h(2)<0$

$h(5)=0>h(3)\quad \therefore\ h(5)-h(3)>0$

$h(6)>0>h(4)\quad \therefore\ h(6)-h(4)>0$

$h(7)>0=h(5)\quad \therefore\ h(7)-h(5)>0$

$h(8)=0<h(6)\quad \therefore\ h(8)-h(6)<0$

$h(9)<0<h(7)\quad \therefore\ h(9)-h(7)<0$

$m\geq 8$이면 $h(m+2)<h(m)$이므로,

$h(m+2)>h(m)$을 만족하는 자연수 m은 $m=3,\ 4,\ 5$의 3개 $\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

20 삼각형 ABC의 무게중심 $(1,\ 1,\ 3)$을 G라 하자.

D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 삼각형 ABC의 무게중심 $\mathrm{G}(1,\ 1,\ 3)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{DG}}\perp$(평면 ABC)에서 $\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,//\,(2,\ -1,\ 1)$

$\therefore\ \mathrm{D}(1+2t,\ 1-t,\ 3+t)$

D가 평면 $x+y+z=3$ 위에 있으므로

$1+2t+1-t+3+t=3,\ t=-1$

$\therefore\ \mathrm{D}(-1,\ 2,\ 2)$

D에서 평면 ABC까지의 거리는

$$\overline{\mathrm{DG}}=\frac{|-2-2+2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

정사면체의 한 변의 길이를 a라 하면

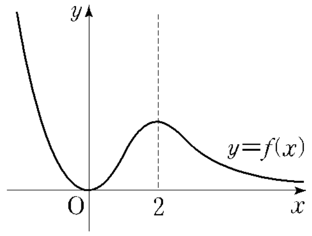
$$\overline{\mathrm{DG}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a=\sqrt{6}$$

$\therefore\ a=3$

21 $f'(x) = kxe^{-x}(2-x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{kx^2}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} kx^2 \cdot e^{-x} = \infty$이므로 증감표를 그리면 다음과 같다.

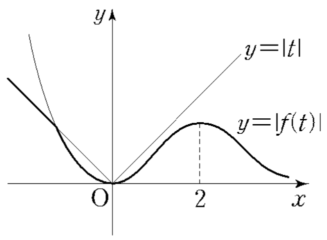
x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(∞)	↘	0	↗	$\frac{4k}{e^2}$	↘	(0)

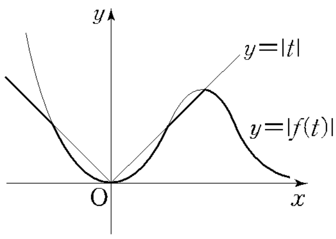
따라서 그래프의 개형은 다음과 같다.



점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로, $|t|$와 $|f(t)|$의 값 중 작거나 같은 것을 $g(t)$의 값으로 한다.

∴ 좌표평면에서 $y = |t|$, $y = |f(t)|$의 그래프 중 아랫부분에 위치하는 것을 $y = g(t)$의 그래프로 한다.





위 그림들에서 굵은 실선이 $y = g(t)$의 그래프이다.

$y = g(t)$가 미분가능하지 않은 점이 하나만 존재하는 것은 왼쪽 그래프와 같은 꼴이므로, $y = f(x)$의 그래프는 $x > 0$인 곳에서 $y = x$보다 접하거나 아래에 위치해야 한다.

접하는 때가 k가 최대가 되는 때이다.

접점의 x좌표를 $m(m > 0)$이라 하면

$f(m) = m$이고 $f'(m) = 1$

$$\begin{cases} km^2 e^{-m} = m & \cdots ㉠ \\ kme^{-m}(2-m) = 1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $kme^{-m} = 1$

∴ ㉡에서 $1 \cdot (2-m) = 1$

∴ $m = 1$

∴ ㉠에서 $k \cdot 1 \cdot e^{-1} = 1$

∴ $k = e$

22 $f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+13=\ln x+14$이므로

$f'(1)=\ln 1+14=14$

23 $f(x)=2\left(\cos x\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\sqrt{3}\sin x$

$=\cos x+3\sqrt{3}\sin x$

$=\sqrt{28}\sin(x+\alpha)\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{28}},\ \cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$

$\therefore$ 최댓값 $a=\sqrt{28}$

$\therefore\ a^2=28$

24 행렬 A를 구하면

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}$이다.

$A^2=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3E$이므로

$A^4=9E$

$\therefore\ (a,\ b)=9\times(5,\ -1)=(45,\ -9)$

따라서 $a+b=45-9=36$

25 표본평균을 $\overline{x}$ 라 하면

95% 신뢰구간은

$\left[\overline{x}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=[100.4,\ 139.6]$이므로

$\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=100.4,\ \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=139.6$

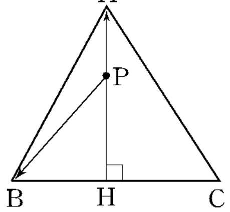
$\therefore\ \overline{x}=120,\ 1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=19.6$

99% 신뢰구간은 $\left[\overline{x}-2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$이고

$2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=25.8$이므로

99% 신뢰구간은 $[94.2,\ 145.8]$포함되는 자연수 x는 $95\le x\le 145$에서 51개

26 $\angle\mathrm{BPH}=\theta$라 하면



$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\left||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cdot\cos(\pi-\theta)\right|$

$=\left||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cdot\cos\theta\right|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$

$\overline{\mathrm{PA}}=x,\ \overline{\mathrm{PH}}=y\ \ (x>0,\ y>0)$라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=xy,$

$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{3}$ 이므로 $x+y=\sqrt{3}$

$\therefore$ (산술평균) ≥ (기하평균)으로부터

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (등호는 $x=y$일 때 성립)

$\sqrt{3} \geq 2\sqrt{xy}$

$\frac{3}{4} \geq xy$

$\therefore\ p+q=3+4=7$

27 점 P_n의 x좌표를 나열하면

$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

이므로 점 P_{25}의 x좌표 a는 -1이다.

점 P_n의 y좌표를 나열하면

$0,\ 0,\ 2,\ -2,\ 4,\ -4,\ 6,\ -6,\ \cdots$

이므로 홀수번째 항으로 이루어진 수열은 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이므로 점 P_{25}의 y좌표 $b=0+(13-1)\times 2=24$

$\therefore\ a+b=23$

[다른 풀이]

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면 조건 (나)에서 $x_n+x_{n+1}=x_{n+2}+x_{n+3}$,

$x_{n+2}-x_n=-(x_{n+3}-x_{n+1})$이고 $x_{n+3}-x_{n+1}=-(x_{n+4}-x_{n+2})$이므로

$x_{n+2}-x_n=x_{n+4}-x_{n+2}$

따라서, 짝수번째 항으로만 이루어진 수열과 홀수번째 항으로만 이루어진 수열은 모두 등차수열이다.

$x_1=-1,\ x_3=-1$이므로 $x_{2n-1}=-1\ \ \therefore\ x_{25}=a=-1$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면 위와 같이 수열 $\{y_{2n}\},\ \{y_{2n-1}\}$ 모두 등차수열이다.

$y_1=0,\ y_3=2$이므로 수열 $\{y_{2n-1}\}$은 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이다.

$y_{2n-1}=0+(n-1)\times 2=2(n-1)$

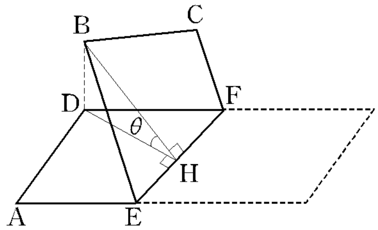
$n=13$을 대입하면 $y_{25}=24$, 즉 $b=24$

$\therefore\ a+b=23$

28 B에서 $\overline{\mathrm{EF}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼수선 정리에 의해 $\overline{\mathrm{DH}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$

두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{\mathrm{EF}}$에 수직인 $\overline{\mathrm{BH}}$와 $\overline{\mathrm{DH}}$가 이루는 각과 같다.



$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.

$\triangle BDA \backsim \triangle BEH$이므로

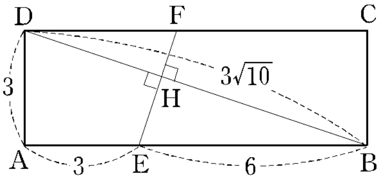
$\overline{EB} : \overline{HB} = \overline{DB} : \overline{AB}$

$\overline{HB} = \dfrac{9 \cdot 6}{3\sqrt{10}} = \dfrac{18}{\sqrt{10}}$

$\overline{DH} = \overline{DB} - \overline{BH} = 3\sqrt{10} - \dfrac{18}{\sqrt{10}} = \dfrac{12}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore 60\cos\theta = 60 \times \dfrac{2}{3} = 40$



29 $\angle BCD = \dfrac{1}{3}(\angle BCA) = \dfrac{\pi - 3\theta}{3}$

$\triangle ABC$ 에서 사인정리에 의해

$\dfrac{1}{\sin(\pi - 3\theta)} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}$

$\triangle BCD$ 에서 사인정리에 의해

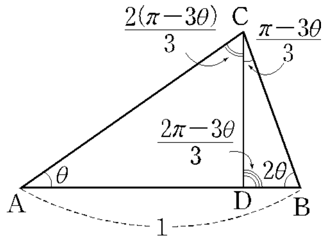
$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)} = \dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}$

$\therefore \overline{CD} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)}\overline{BC} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\therefore a = \lim\limits_{\theta \to +0} \dfrac{\overline{CD}}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to +0} \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)} \cdot \dfrac{\sin 2\theta}{\theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\dfrac{2}{3}\pi} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

$\therefore 27a^2 = 27 \times \dfrac{16}{27} = 16$



30 a_n은 $2^x - n \le x \le \log_2(x+n)$을 만족하는 정수의 개수이다.

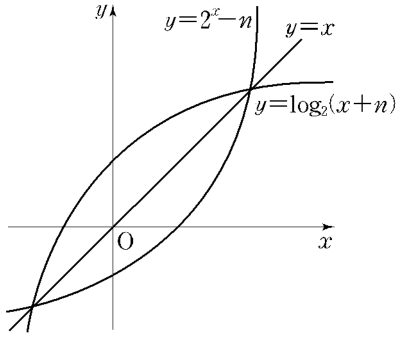
두 함수 $f(x) = 2^x - n$, $g(x) = \log_2(x+n)$이라 놓으면 $f(x)$, $g(x)$는 증가함수이고 서로 역함수이다.

오른쪽 그림에서, $2^x - n \le x$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하면 된다.

i) $x < 0$일 때

$-n < 2^x - n \le 1 - n$이므로

$-n + 1 \le x \le 0$이면 주어진 조건을 만족한다. (n개 존재)



ⅱ) $x>0$일 때

$2^x - x \le n$을 만족하는 양수 x를 구하면 된다.

$h(x) = 2^x - x$라 하면

$h(1)=1$, $h(2)=2$, $h(3)=5$, $h(4)=12$, $h(5)=27$, $h(6)=58$이므로

$n=1$일 때 $x=1$

$n=2,\ 3,\ 4$일 때 $x=1,\ 2$

$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$일 때 $x=1,\ 2,\ 3$

$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$일 때 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$일 때 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\therefore$ ⅰ), ⅱ)에서, $n=1$이면 $a_n = n+1$

$n=2,\ 3,\ 4$이면 $a_n = n+2$

$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$이면 $a_n = n+3$

$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$이면 $a_n = n+4$

$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$이면 $a_n = n+5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = \left(\sum_{n=1}^{30} n\right) + (1\times1) + (3\times2) + (7\times3) + (15\times4) + (4\times5)$$

$$= 465 + 108 = 573$$