수능 정답 및 해설

2013학년도 수리 영역(나형)

정 답										
01 ④	02 ③	03 ⑤	04 ③	05 ⑤	06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ⑤
11 ④	12 ⑤	13 ②	14 ③	15 ①	16 ③	17 ④	18 ③	19 ①	20 ④
21 ②	22 5	23 10	24 12	25 98	26 16	27 23	28 40	29 68	30 573

해 설

01 $2A+B=2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 $1+0+3+3=7$이다.

02 $\log_2 40-\log_2 5=\log_2\frac{40}{5}$

$=\log_2 8$

$=3$

03 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{5}{3}$

04 그래프에서 모든 성분의 합은 "변의 개수의 2배"이므로

$2\times 5=10$

05 $\lim_{x\to -1-0} f(x)=1,\ \lim_{x\to +0} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to -1-0} f(x)+\lim_{x\to +0} f(x)=1+1=2$

06 공비를 r라고 하면

$$\frac{a_1 \cdot a_2}{a_3}=\frac{a_1 \cdot a_1 r}{a_1 r^2}=\frac{a_1}{r}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\frac{2a_2}{a_1}+\frac{a_4}{a_2}=\frac{2a_1 r}{a_1}+\frac{a_1 r^3}{a_1 r}$$
$$=2r+r^2=8$$

$\therefore\ r^2+2r-8=0,\ (r+4)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

㉠에서 $a_1=4$

$\therefore\ a_3=a_1 \cdot r^2=4 \cdot 2^2=16$

07 $T_0=20℃$, $t=\frac{9}{8}$일 때, $T=365℃$이므로

$$365=20+k\log\left(8 \cdot \frac{9}{8}+1\right)$$
$$=20+k$$

$\therefore\ k=345$

$710=20+345\log(8a+1)$에서

$\therefore\ \log(8a+1)=2,\ 8a+1=100$

$\therefore\ a=\frac{99}{8}$

08 $\mathrm{P}(B^c|A)=2\mathrm{P}(B|A)$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B^c)}{\mathrm{P}(A)}=2 \cdot \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=2\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}\left(\because\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}\right)$

09 $\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -a-4 \\ a+5 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=-a-4,\ y=a+5$

$x+2y-4a=0$을 만족시키므로

$(-a-4)+2(a+5)-4a=0$

$\therefore\ a=2$

10 $\mathrm{B}(n, p)$에서

$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=np(1-p),\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

$\therefore \mathrm{E}(2X-5)=2\mathrm{E}(X)-5$

$=2np-5=175$

$\therefore np=90 \quad \cdots$ ㉠

$\therefore \sigma(2X-5)=2\sigma(X)=2\sqrt{np(1-p)}=12 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $p=\frac{3}{5}$

$\therefore \ n=150$

11 (좌변)$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx$

$=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$

(우변)$=k\left(\int_{-1}^{1}(x+1)dx\right)^2$

$=k\cdot 4$

$\therefore 4k=\frac{8}{3}$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

12 3명에게 주스 4병을 나누어 주는 방법의 수는 ${}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4$이고, 생수 2병을 나누어 주는 방법의 수는 ${}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2$, 우유 1병을 나누어 주는 방법의 수는 ${}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1$ 이므로 구하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=270$(가지)이다.

13 학생의 시험 점수를 X라 하면,

$X\sim \mathrm{N}(500,\ 25^2)$, $Z=\frac{X-500}{25}$이므로

$\mathrm{P}(475\le X\le 550)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

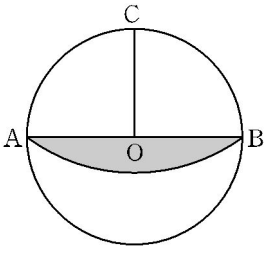
$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

14 R_n에서 새로 생긴 작은 원의 반지름을 r_n이라 하고
새로 생긴 작은 원의 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.
a_1은 반원에서 [그림 1]의 색칠된 부분의 넓이를 빼면 되므로

$a_1=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2-\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)$

$=1$



[그림 1]

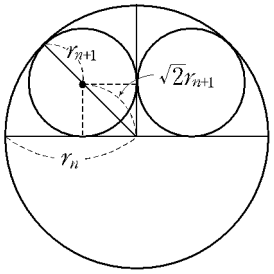
[그림 2]에서 $\sqrt{2}\,r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$, $\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$\therefore \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2 = (\sqrt{2}-1)^2$

새로 생기는 작은 원들은 직전 원의 개수의 2배씩 생기므로

(공비)$= \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \cdot \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2 = 2(\sqrt{2}-1)^2$

$\therefore \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-2(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{4\sqrt{2}+5}{7}$



[그림 2]

15 $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + 3$에서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

또한 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 $y = 2x + b$이므로

$f'(1) = 2,\ f(1) = 2 + b$

가 성립한다.

$\therefore\ 3 + 2a + 9 = 2,\ 1 + a + 9 + 3 = 2 + b$

두 식을 연립하면 $a = -5,\ b = 6$

$\therefore\ a + b = 1$

16 ㄱ. $2A^2 + AB = E,\ A(2A + B) = E$

$\therefore\ A^{-1} = 2A + B \quad \therefore$ 참

ㄴ. $AB + BA = 2A + E$ … ㉠

$2A^2 + AB = E$ … ㉡

㉠ − ㉡에서 $BA - 2A^2 = 2A,\ (B - 2A - 2E)A = O$

A^{-1}이 존재하므로, $B - 2A - 2E = O$

$\therefore\ B = 2A + 2E \quad \therefore$ 참

ㄷ. ㄴ에서 $B = 2A + 2E$이므로

$2A^2 + AB = E$에서

$2A^2 + A(2A + 2E) = E$이므로

$4A^2 + 2A - E = O$이다.

또한, $(B - E)^2 = (2A + E)^2 = 4A^2 + 4A + E = 2A + 2E = B$이다.

그런데, $(B - E)^2 = O$이면 $B = O$이고, $B = O$이면 $(B - E)^2 = E \neq O$가 되어 모순이다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 $a_{n+1} - a_n = \left(n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right) - \left((n-1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k}\right)$

$= \boxed{\{2n - (n-1)\}2^{n-1}} + \frac{a_n}{n}$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + \boxed{(n+1) \cdot 2^{n-1}}$

$b_n = \dfrac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1} = b_n + \dfrac{\boxed{(n+1)2^{n-1}}}{n+1}$

$b_2 = 3$이므로

$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} 2^{k-1}$

$= 3 + \dfrac{2(2^{n-2}-1)}{2-1}$

$= \boxed{2^{n-1}+1}$

$\therefore\ f(n) = (n+1)\cdot 2^{n-1},\ g(n) = 2^{n-1}+1$

$\therefore\ f(4)+g(7) = 40+65 = 105$

18 주어진 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$1+a = b+1+1\ \cdots$ ㉠

또한 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$3+a = 2b+1\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 두 식을 연립하면 $a=4,\ b=3$

$\therefore\ a+b=7$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \dfrac{n^2+1}{2n+1}\right) = 3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n - \dfrac{n^2+1}{2n+1}\right) = 0$

$na_n - \dfrac{n^2+1}{2n+1} = b_n$이라 하면, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$a_n = \dfrac{b_n}{n} + \dfrac{n^2+1}{2n^2+n}$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{n} + \dfrac{n^2+1}{2n^2+n}\right) = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n^2 + 2a_n + 2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{1}{4} + 1 + 2$

$= \dfrac{13}{4}$

20 ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)g(x) = 1\cdot(-1) = -1$

$\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x) = (-1)\cdot 1 = -1$

$\therefore\ \lim_{x\to 1} f(x)g(x) = -1$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\lim_{x\to -0} g(x+1) = -1$, $\lim_{x\to +0} g(x+1) = 1$

$\lim_{x\to -0} g(x+1) \neq \lim_{x\to +0} g(x+1)$

따라서, $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to -1-0} f(x)g(x+1) = (-1)\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to -1+0} f(x)g(x+1) = 1\cdot 0 = 0$이고,

$x=-1$에서의 함숫값은 $f(-1)g(0)=0$이다.

따라서, $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다. $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$에서 $F'(x) = f(x)$, $f(0)=0$이다.

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $F'(x)$, 즉 $f(x)$의 부호가 오직 한 번 변해야 한다.

따라서, 삼차함수 $f(x)$가 x축과 오직 한 번 만나거나 x축과 접해야 한다.

$f(x) = x^3 - 3x + a$에서 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$이므로

부등식 $f(1)\times f(-1) \geq 0$이 성립해야 한다.

$(-2+a)(2+a) \geq 0$, $a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$

따라서, 양수 a의 최솟값은 2이다.

22 $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5$

23 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n = a + (n-1)d$에서

$a_2 = a + d = 16$

$a_5 = a + 4d = 10$

$\therefore a = 18$, $d = -2$

$a_k = -2k + 20 = 0$

$\therefore k = 10$

24 $f(x) = x^3 + 9x + 2$에서 $f'(x) = 3x^2 + 9$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 12$

25 모니터의 수명을 X라 하면

$n = 100$, 표본표준편차 $s = 500$

신뢰도 95%로 추정하면, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$이므로

$k = 1.96$

신뢰구간을 구하면,

$$\left[\overline{x}-k\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+k\frac{s}{\sqrt{n}}\right]=\left[\overline{x}-1.96\frac{500}{\sqrt{100}},\ \overline{x}+1.96\frac{500}{\sqrt{100}}\right]$$

$\therefore\ c=1.96\times 50=98$

26 어떤 자연수를 N이라 하면

$$N=\left(\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^n$$

$$=3^{\frac{5}{6}n}$$

여기서 N이 자연수이려면 $\frac{5}{6}n$은 0 이상의 정수여야 한다.

$\therefore\ n=6k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 16)$

$\therefore$ 16개

27 점 P_n의 x좌표를 나열하면

$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

이므로 점 P_{25}의 x좌표 a는 -1이다.

점 P_n의 y좌표를 나열하면

$0,\ 0,\ 2,\ -2,\ 4,\ -4,\ 6,\ -6,\ \cdots$

이므로 홀수번째 항으로 이루어진 수열은 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이므로 점 P_{25}의 y좌표 $b=0+(13-1)\times 2=24$

$\therefore\ a+b=23$

[다른 풀이]

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면 조건 (나)에서 $x_n+x_{n+1}=x_{n+2}+x_{n+3}$,

$x_{n+2}-x_n=-(x_{n+3}-x_{n+1})$이고 $x_{n+3}-x_{n+1}=-(x_{n+4}-x_{n+2})$이므로

$x_{n+2}-x_n=x_{n+4}-x_{n+2}$

따라서, 짝수번째 항으로만 이루어진 수열과 홀수번째 항으로만 이루어진 수열은 모두 등차수열이다.

$x_1=-1,\ x_3=-1$이므로 $x_{2n-1}=-1\ \therefore\ x_{25}=a=-1$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면 위와 같이 수열 $\{y_{2n}\},\ \{y_{2n-1}\}$ 모두 등차수열이다.

$y_1=0,\ y_3=2$이므로 수열 $\{y_{2n-1}\}$은 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이다.

$y_{2n-1}=0+(n-1)\times 2=2(n-1)$

$n=13$을 대입하면 $y_{25}=24$, 즉 $b=24$

$\therefore\ a+b=23$

28 최고차항의 계수가 1이고, $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-3)$라고 하자.

$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$에서

$\int_0^3 f(x)dx+\int_3^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$

$\therefore\ \int_0^3 f(x)dx=0\ \cdots$ ㉠

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 (x^2-(\alpha+3)x+3\alpha)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+3}{2}x^2+3\alpha x\right]_0^3$

$=\frac{9\alpha-9}{2}$

이므로 ㉠에서 $\alpha=1$

$\therefore\ S=-\int_1^3 (x-1)(x-3)dx=\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 30S=40$

29 여사건은 이웃한 남학생이 없는 경우이므로

$p=1-\frac{4!4!\times 2}{8!}$

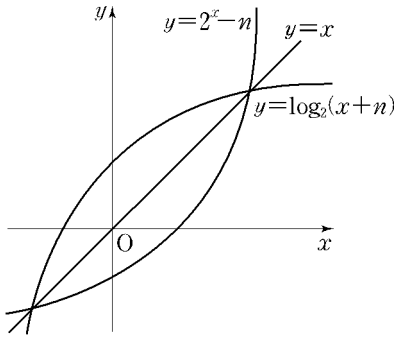
$=\frac{34}{35}$

$\therefore\ 70p=68$

30 a_n은 $2^x-n\le x\le \log_2(x+n)$을 만족하는 정수의 개수이다.

두 함수 $f(x)=2^x-n$, $g(x)=\log_2(x+n)$이라 놓으면 $f(x)$, $g(x)$는 증가함수이고 서로 역함수이다.

오른쪽 그림에서, $2^x-n\le x$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하면 된다.



i) $x<0$일 때

$-n<2^x-n\le 1-n$이므로

$-n+1\le x\le 0$이면 주어진 조건을 만족한다.(n개 존재)

ii) $x>0$일 때

$2^x-x\le n$을 만족하는 양수 x를 구하면 된다.

$h(x)=2^x-x$라 하면

$h(1)=1$, $h(2)=2$, $h(3)=5$, $h(4)=12$, $h(5)=27$, $h(6)=58$이므로

$n=1$일 때 $x=1$

$n=2,\ 3,\ 4$일 때 $x=1,\ 2$

$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$일 때 $x=1,\ 2,\ 3$

$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$일 때 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$일 때 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\therefore$ ⅰ), ⅱ)에서, $n=1$이면 $a_n=n+1$

$n=2,\ 3,\ 4$이면 $a_n=n+2$

$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$이면 $a_n=n+3$

$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$이면 $a_n=n+4$

$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$이면 $a_n=n+5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n = \left(\sum_{n=1}^{30} n\right) + (1\times 1) + (3\times 2) + (7\times 3) + (15\times 4) + (4\times 5)$$

$$= 465 + 108 = 573$$